CONCOURS COMMUN INA ET ENSA 1983

MATHÉMATIQUES

TB′ - TD′

Durée : 3 heures

Un corrigé

Partie I

1. Les solutions de (E) sont exactement l'ensemble des racines 3-ème de l'unité qui sont :

$$1,\ j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } j^2 = \bar{j} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Vérification immédiate.

3. Il s'agit d'un système de Vandermonde[1], associé à la matrice $V(1,j,j^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j^4 \end{pmatrix}$. Comme $1, j, j^2$ sont deux à deux distincts, alors $V(1,j,j^2)$ est inversible et donc $(0,0,0)$ est l'unique solution.

Partie II

1. C'est de cours.

2. Il est clair que la suite nulle est un élément de $\mathscr{F}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathscr{F}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} + \lambda v_{n+3} = u_n + \lambda v_n.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}$ et par conséquent $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.

3. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(y_n)_{n\in\mathbb{N}} + \gamma(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha + \beta j^n + \gamma j^{2n} = 0.$$

La dernière question de la partie I montre que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc la $\{\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \}$ est une famille libre.

4. On peut vérifier facilement que l'application Φ est linéaire, de plus pour chaque $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ il existe une seule suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation $u_{n+3} = u_n$. Donc Φ est un isomorphisme de $\mathscr{F}$ dans $\mathbb{C}^3$. Comme $\mathbb{C}^3$ est de dimension finie, il est de même de $\mathscr{F}$ et on a :

$$\dim(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{C}^3) = 3.$$

5. Les trois suites de la question 3 sont des éléments de $\mathscr{F}$ et forment une famille libre, donc elles constituent une base de $\mathscr{F}$.

Partie III

1. On trouve $\det(A - rI) = 1 - r^3$.

2. Si $r \in \{\ 1, j, j^2\ \}$, $\det(A - rI) = 0$ et donc $\operatorname{rg}(A - rI) < 3$, c'est-à-dire les colonnes de $A - rI$ ne sont pas linéairement indépendantes.

3. On a $I_r = \operatorname{Im}(A - rI)$, donc si $r \in \{\ 1, j, j^2\ \}$, $\operatorname{rg}(A - rI) < 3$ et par conséquent $\dim(I_r) \leq 2$.

●●●●●●●●●●●

---

1. On appelle déterminant de Vandermonde le déterminant suivant : $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$. Il vaut : $\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)$.